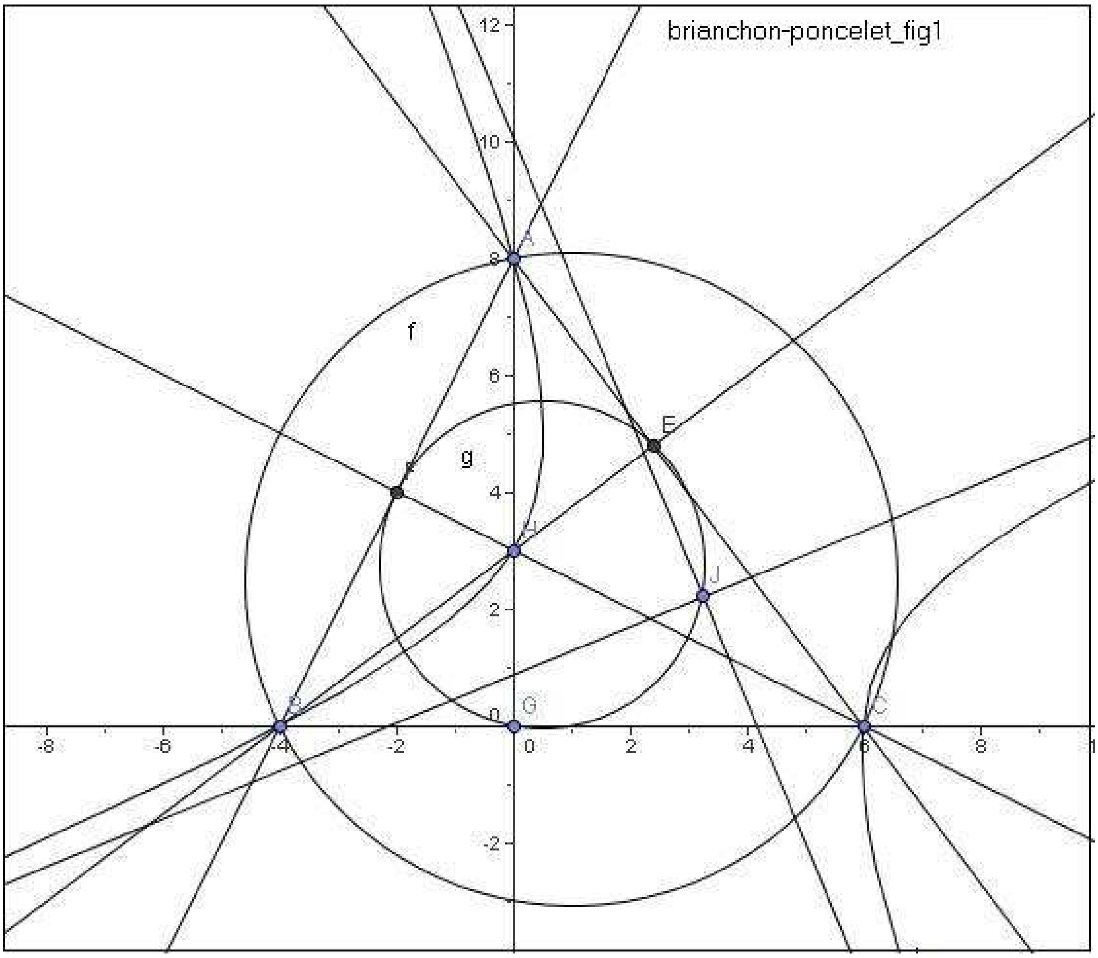
Théorème de Brianchon Poncelet (hyperbole équilatère circonscrite à un triangle)

Une conique circonscrite a un triangle est une hyperbole équilatère si et seulement si elle passe par l'orthocentre. Corollaire : le centre de cette hyperbole équilatère appartient au cercle d'Euler du triangle.



Démonstration de la proposition directe :
Soit un triangle ABC direct et H son orthocentre (cf. figure 1) ; On prend pour origine O et axes des coordonnées :

- O = le pied de la hauteur issue de A
- **Ox** de même sens que le vecteur **BC**
- **Oy** de même sens que le vecteur **OA**
- Dans ce repère, les coordonnées des différents points sont les suivantes :
- A(0,a)
- B(b,0)
- C(c,0)
- H(0,d) et on sait que a.d + b.c = 0

L'équation générale d'une conique $\mathcal{C}$ est :
$\alpha.X^2 + \beta.X.Y + \chi.Y^2 + \delta.X + \varepsilon.Y = \phi$
On écrit que :

- $\mathcal{C}$ passe par A : $\chi.a^2 + \varepsilon.a = \phi$
- $\mathcal{C}$ passe par B : $\alpha.b^2 + \delta.b = \phi$
- $\mathcal{C}$ passe par C : $\alpha.c^2 + \delta.c = \phi$
- $\mathcal{C}$ passe par H : $\chi.d^2 + \varepsilon.d = \phi$

D'ou les valeurs des coefficients de l'équation de $\mathcal{C}$:

- $\alpha = -\phi/(b.c)$
- β = quelconque
- $\chi = -\phi/(a.d)$
- $\delta = \phi.(b + c)/(b.c)$
- $\varepsilon = \phi.(a + d)/(a.d)$
- ϕ = quelconque

Or, on sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C}$ soit une hyperbole équilatère est que l'on ait la relation : $\alpha + \chi = 0$[1] , ce qui est précisément le cas.
Donc $\mathcal{C}$ est une hyperbole équilatère, c.q.f.d.

<u>Démonstration de la proposition réciproque :</u>
Soit une hyperbole équilatère $\mathcal{C}$ d'équation :
$\alpha.X^2 + \beta.X.Y - \alpha.Y^2 + \delta.X + \varepsilon.Y = \phi$
On écrit que :

- $\mathcal{C}$ passe par A : $-\alpha.a^2 + \varepsilon.a = \phi$
- $\mathcal{C}$ passe par B : $\alpha.b^2 + \delta.b = \phi$
- $\mathcal{C}$ passe par C : $\alpha.c^2 + \delta.c = \phi$

D'où les valeurs des coefficients de l'équation de $\mathcal{C}$:

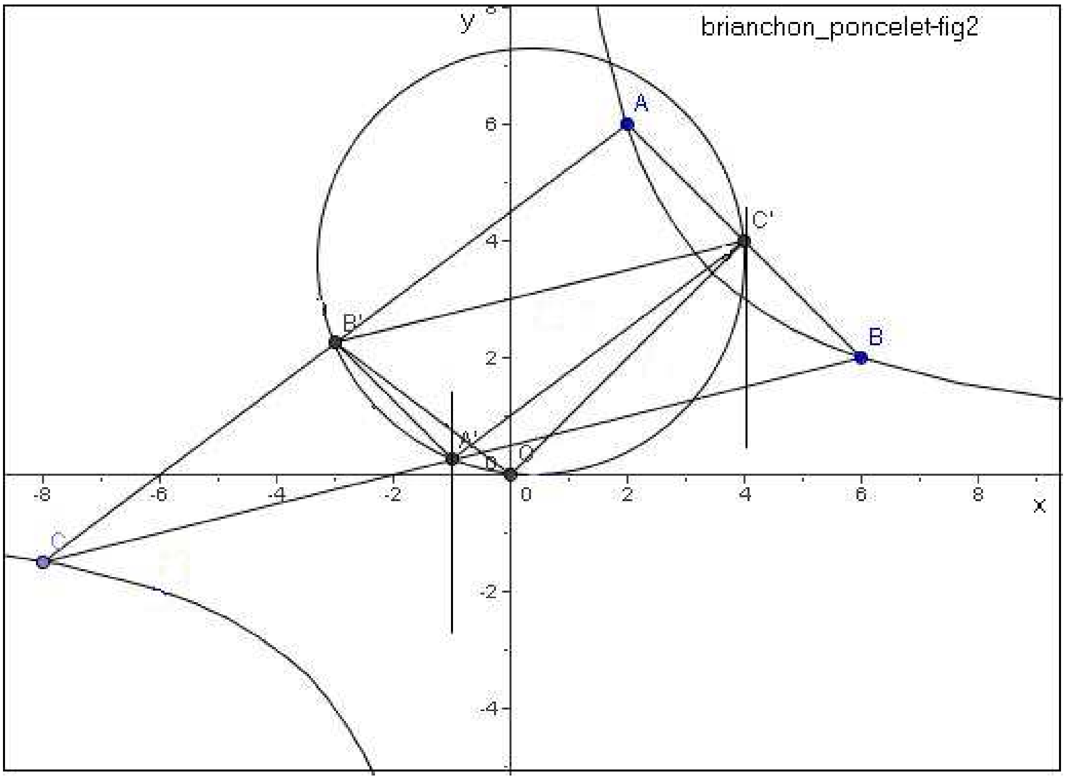
- $\alpha = -\phi/(b.c)$
- β = quelconque
- $\delta = \phi.(b + c)/(b.c)$
- $\varepsilon = \alpha.a + \phi/a$
- ϕ = quelconque

Les abscisses des points ou elle coupe **Oy** sont donnes par :
$-\alpha.Y^2 + \varepsilon.Y = \phi$
Ce sont donc les solutions de l'équation du second degré en Y :
$\alpha.Y^2 - \varepsilon.Y + \phi = 0$
Or, nous connaissons déjà une des deux solutions puisque $\mathcal{C}$ passe par A (c'est a) ; donc la seconde vaut $(\phi/\alpha)/a = - b.c/a = d$, ce qui correspond a H.
Donc $\mathcal{C}$ passe par l'orthocentre, c. q. f. d.

---

[1] cela se démontre aisément si on se souvient [en passant en coordonnées homogènes (X,Y,T) et en faisant T=0] que les points a l'infini de $\mathcal{C}$ sont donnés par $\alpha.X^2 + \beta.X.Y + \chi.Y^2 = 0$; ceci correspond a l'équation des pentes (Y/X) des asymptotes de l'hyperbole ; elles sont perpendiculaires si et seulement si la pente de l'une vaut l'opposé de l'inverse de la pente de l'autre.

Démonstration du corollaire :
Soit une hyperbole équilatère d'asymptotes Ox et Oy, circonscrite à un triangle ABC ; soit en outre A' le milieu de BC, etc. (conf. fig2)



On sait que la droite portant la corde AB et la droite portant OC' sont isogonales conjuguées par rapport aux asymptotes[2]. Donc (OB',OC') = (AB',AC') ; or, puisque AB'A'C' est un parallélogramme, on a aussi (AB',AC') =(A'B',A'C') . Donc (OB',OC')=(A'B',A'C'), donc le point O appartient au cercle A'B'C', cercle d'Euler du triangle ABC, c.q.f.d.

Bibliographie :

1 - figures exécutées avec l'aide de Geogebra (Markus Hohenwarter, www.geogebra.at)
2 - G. Boulingand, cours de mathématiques supérieures, Vuibert, Paris, 1949
3 - Paul Yiu, Dpt of Mathematical Sciences Florida Atlantic University, "A Tour of Triangle Geometry"

[2] Ceci se démontre très simplement, par exemple en écrivant l'équation d'une sécante sous la forme y=a.x+b (donc de pente a), celle de l'hyperbole sous la forme x.y= c, en déterminant les coordonnées des extrémités de la corde (AB par exemple) et celles de son milieu C', et en constatant que la pente de OC' est égale à (-a).