**Invariance du birapport de 4 droites et du birapport de 4 points d'un cercle et, en général, de 4 points d'une conique**

1 – birapport de 4 points d'une droite :

Etant donnés une droite orientée et 4 points A B C D de cette droite, on appelle birapport de ces 4 points la quantité $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ et on écrit $[A,B,C,D] = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$

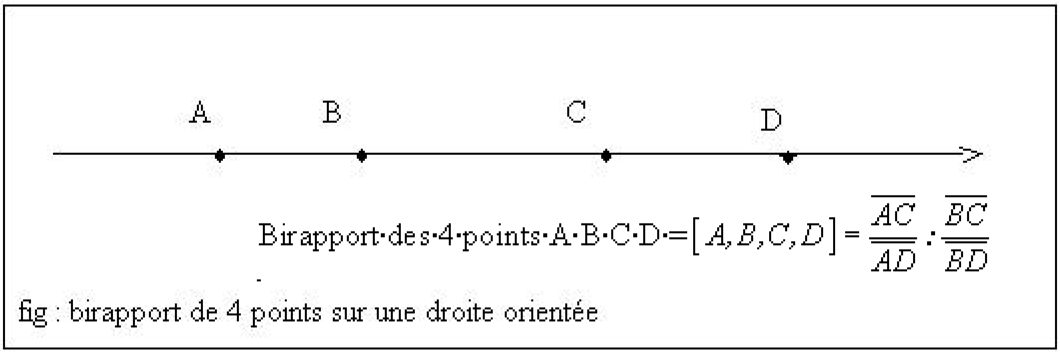



fig : birapport de 4 points sur une droite orientée

2 – birapport de 4 droites coplanaires, invariance :

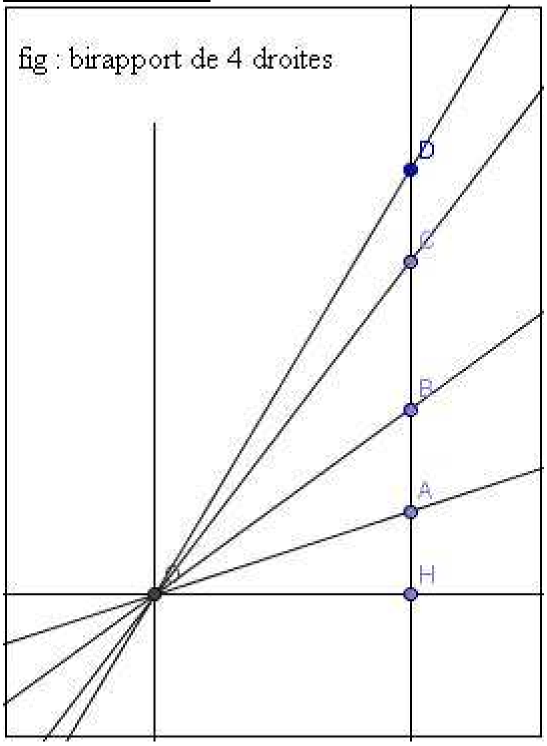
Hypothèse :

Etant données 4 droites coplanaires D1, D2, D3, D4 et une sécante les coupant respectivement en A1, A2, A3, A4, on appelle birapport de ces 4 droites le birapport des 4 points précités

Conclusion :

Ce birapport est indépendant de la sécante (ce qui justifie la définition).

Démonstration :




Il en existe plusieurs. La plus simple, à mon avis, est la suivante : on considère 4 droites concourantes en O et coplanaires, ainsi qu'une sécante qui les coupe en A1, A2, A3, A4.

On munit le plan d'un repère orthonormé tel que Ox soit perpendiculaire à la sécante, qu'il coupe en H. On pose : $a=\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OA}\right);b=\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OB}\right);c=\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OC}\right);d=\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OD}\right)$ ce qui conduit à

$$\overline{AC}=\overline{HC}-\overline{HA}=\overline{OH}.\{tg(c)-tg(a)\}=\overline{OH}.\frac{sin(c-a)}{cos(c).cos(a)}$$

$$\overline{AD}=\overline{HD}-\overline{HA}=\overline{OH}.\{tg(d)-tg(a)\}=\overline{OH}.\frac{sin(d-a)}{cos(d).cos(a)}$$

$$\overline{BC}=\overline{HC}-\overline{HB}=\overline{OH}.\{tg(c)-tg(b)\}=\overline{OH}.\frac{sin(c-b)}{cos(c).cos(b)}$$

$$\overline{BD}=\overline{HD}-\overline{HB}=\overline{OH}.\{tg(d)-tg(b)\}=\overline{OH}.\frac{sin(d-b)}{cos(d).cos(b)}$$

Donc :

$[A,B,C,D]=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\frac{sin(c-a)}{sin(d-a)}:\frac{sin(c-b)}{sin(d-b)}$ expression indépendante de la sécante, C.Q.F.D.

3 – birapport de 4 points d'un même cercle :

On considère 4 points A,B,C,D d'un même cercle, ainsi qu'un autre point O situé sur le même cercle ; d'après ce qui précède et d'après les propriétés des arcs capables[1], le birapport des 4 droites OA, OB, OC, OD est indépendant de la position du point O sur le cercle.

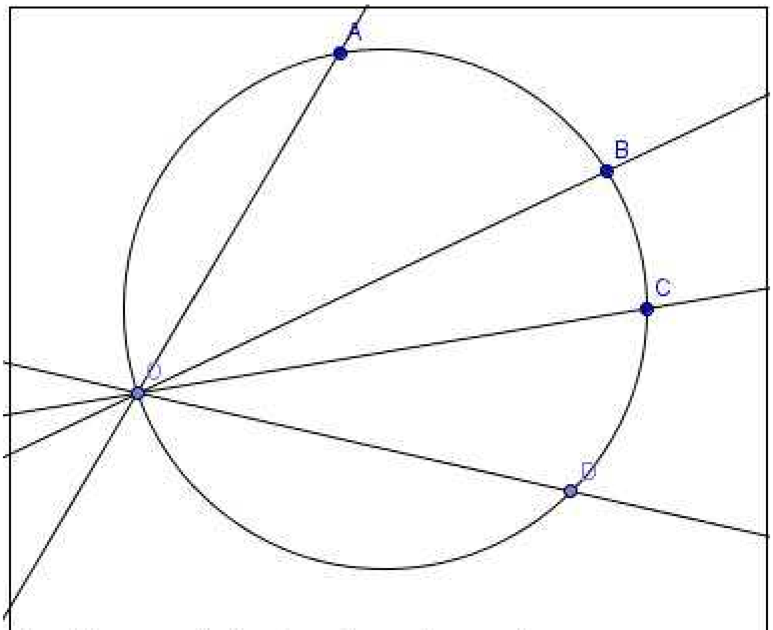


fig : birapport de 4 points d'un même cercle

[1] Les angles des droites deux à deux sont en effet invariants quand 0 de déplace sur le cercle.

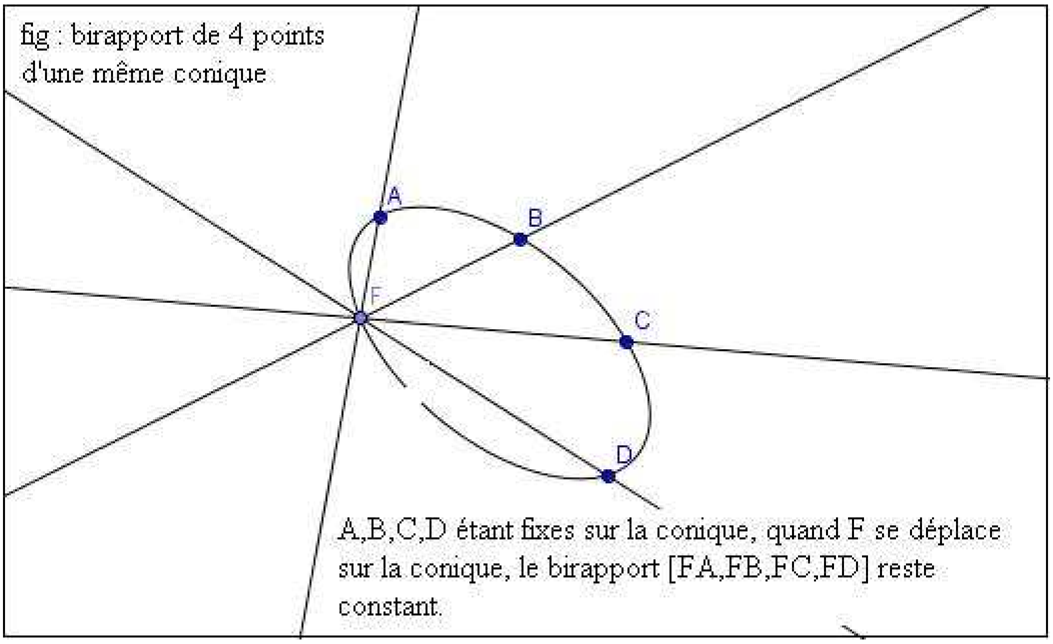
Il est donc légitime d'introduire la notion de birapport de 4 points d'un même cercle, et on a par ailleurs la relation[2] : $[A,B,C,D]=[OA,OB,OC,OD]=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{\overset{\frown}{AD}}:\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ dans laquelle interviennent les mesures des arcs et des cordes en adoptant un sens de rotation.

4 – birapport de 4 points d'une même conique:

On passe du cas du cercle à celui de la conique en se souvenant qu'une conique peut toujours être considérée comme la transformée d'un cercle par projection centrale sur un cône circulaire de révolution, les rapports entre longueurs de segments d'une même droite étant conservés dans une telle transformation.

Le théorème précédent s'énonce donc alors comme suit :

**On considère 4 points A,B,C,D d'une même conique, ainsi qu'un autre point F situé sur la même conique ; alors, le birapport des 4 droites FA, FB, FC, FD est indépendant de la position du point F sur la conique.**




[2] Parce que les cordes et les arcs sont proportionnels aux sinus des angles inscrits correspondants.